(1) Le Théorème de Weierstrass (Dantzig)

Théorème : Toute application définie et continue sur le segment $[0;1]$, à valeurs réelles, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.

Démonstration :

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une application continue.

Soit $x \in [0;1]$.

Considérons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ une v.a.r. $S_{n,x}$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;x)$ et soit

$$p_n : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto E\left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)\right)$$

On a alors, par le théorème de transfert :

$$\forall x \in [0;1],\ p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\left(p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(S_{n,x} = k\right)\right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, p_n est la restriction sur $[0;1]$ d'une fonction polynôme.

- Montrons que la suite de fonction polynôme $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction f :

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est uniformément continue sur $[0;1]$ (car continue), alors $\exists \eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [0;1],\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Écrivons $\left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|$ comme somme de 2 V.a. :

$$\left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right| = \left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right| \cdot \mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|<\eta} + \left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right| \cdot \mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|\geq\eta}$$

On a d'abord :

$$0 \leq \left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|<\eta} \leq \varepsilon \, \mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|<\eta} \leq \varepsilon$$

et : $0 \leq \left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right| \cdot \mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|\geq\eta} \leq 2\|f\|_\infty \, \mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|\geq\eta}$

(inégalité triangulaire + f bornée sur $[0;1]$)

La v.a. $\mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|\geq\eta}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|\geq\eta\right)$$

Son espérance est donc : p (par définition de l'espérance d'une v.a. de Bernoulli)

D'où :

$$E\left(\left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)-f(x)\right|\right) \leq E\left(\varepsilon + 2\|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|\geq\eta}\right)$$

$$\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n,x}}{n}-x\right|\geq\eta\right)}$$

$$\leq \frac{x(1-x)}{\eta^2 \cdot n}$$ par l'inégalité de Tchebychev

$$\left(\text{car } V\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_{n,x}) = \frac{1}{n^2} nx(x-1)\right)$$

de plus $x(1-x) \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in [0;1]$

d'où $E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\right) \leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned}
|p_n(x)-f(x)| &= \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(x)\right| \\
&= \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(x)\right| \\
&= \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right)\right| \\
&\leqslant E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\right) \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \qquad \left(\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)
\end{aligned}$$

Soit maintenant $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \leqslant \varepsilon$

alors on a : $\forall n \geqslant n_0, \|p_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$

et la suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers f.

(2) Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev & Loi faible des grands nombres (66 leçon)

- Proposition: Inégalité de Markov:

Soit X une v.a. à valeurs positives ou nulle et admettant une espérance $E(X)$. On a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

- Proposition: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

Soit X une v.a. admettant une variance $V(X)$.
On a:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

- Théorème: Loi faible des grands nombres:

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. définies sur le même espace $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et admettant la même espérance m et la même variance σ^2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit leur moyenne : $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Alors $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers m.

- Démonstration inégalité de Markov:

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On a : $X = X . \mathbb{1}_{X \geq a} + X . \mathbb{1}_{X < a}$
donc $E(X) = E(X . \mathbb{1}_{X \geq a}) + E(X . \mathbb{1}_{X < a})$ (linéarité de E)
$\geq E(X . \mathbb{1}_{X \geq a})$ (positivité)

$$\begin{aligned} E(X) &\geq E(a.\mathbb{1}_{X\geq a}) \quad (\text{car } X \geq a) \\ &\geq a.E(\mathbb{1}_{X\geq a}) \quad (\text{linéarité}) \\ &\geq a.P(X\geq a) \end{aligned}$$

- Démonstration Bienaymé-Tchebychev.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Posons $Y = (X - E(X))^2$ et appliquons l'inégalité de Markov à Y et a^2 : $P(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2}$

$$P((X-E(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{E((X-E(X))^2)}{a^2}$$

d'où $P((X-E(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2}$

d'où $P(|X-E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$

- Démonstration par la loi des grands nombres :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors on a : $E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ (linéarité de l'espérance)

$$= \frac{1}{n}.n.m = m$$

Comme les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2}.n.v^2 \\ &= \frac{v^2}{n} \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a par l'inégalité de Bienaymé Tchebycheu :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|Z_n - m| \geq a) \leq \frac{V(Z_n)}{a^2}$$

$$\leq \frac{v^2}{n}.\frac{1}{a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers m

③ THÉORÈME DE SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON (Dantzig)

- **Proposition :** Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs et si $v_n = o(u_n)$ (resp. $v_n = O(u_n)$), alors :
  1) Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et de plus on a :
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $R'_n = o(R_n)$ (resp $R'_n = O(R_n)$)
  2) Si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge et de plus on a :
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $S'_n = o(S_n)$ (resp. $S'_n = O(S_n)$)

- **Démonstration :**

* Supposons que $v_n = o(u_n)$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq \varepsilon u_n$ (*) (déf. de o)

1) Si $\sum u_n$ converge, alors la suite de ses sommes partielles sont majorées.
Soit alors S un majorant de cette somme. On a alors :

$$\forall n \geq n_0,\ S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n_0} v_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n_0} v_k + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \quad (\text{par } (*))$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n_0} v_k + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} u_k \quad (\text{car } \forall k,\ u_k \text{ est} \geq 0)$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n_0} v_k + \varepsilon . S$$

donc la suite des sommes partielles de $\sum v_k$ est majorée, donc la série $\sum v_n$ est convergente (car série de t.g. positifs)

- Maintenant, si $n \geq n_0$ alors on a $\forall N \geq n+1$:

$$\sum_{k=n+1}^{N} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{N} \varepsilon u_k$$
$$\leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{N} u_k$$

donc à la limite quand N tend vers $+\infty$ on a :

$$\forall n \geq n_0,\ R'_n \leq \varepsilon . R_n \quad \text{et} \quad \underline{R'_n = o(R_n)}$$

2) Supposons maintenant que $\sum v_n$ soit divergente. Alors la suite des sommes partielles n'est pas majorée.
Et donc la suite $(S'_n - S'_{n_0})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. (où $n_0 \in \mathbb{N}$)
Et on a :

$$\forall n > n_0,\ S_n - S_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \geq \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k}_{\frac{1}{\varepsilon}(S'_n - S'_{n_0})}$$

donc la suite $(S_n - S_{n_0})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
On en déduit que $\underline{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente.}}$

- Comme $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite non majorée et croissante, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $n_1 \geq n_0$ et :

$$\forall n \geq n_1,\ S_n \geq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n_0} v_k$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1,\ S'_n &= \sum_{k=0}^{n_0} v_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \\ &\leq \varepsilon S_n + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \\ &\leq \varepsilon \left(S_n + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right) \\ &\leq 2\varepsilon . S_n . \end{aligned}$$

d'où $\underline{S'_n = o(S_n)}$

* Si on suppose $v_n = O(u_n)$, alors $\exists\, K \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq n_0,\ v_n \leq K u_n$$

la démonstration est la même en remplaçant ε par K.

④ DESCRIPTION DES GROUPES CYCLIQUES (66 façon)

Théorème : Si G est cyclique d'ordre n et si a est un générateur de G (i.e $G=\langle a\rangle$), alors :
(i) Si d/n alors G contient $\varphi(d)$ éléments d'ordre d
(ii) G contient $\varphi(n)$ générateurs de a^k tq $n\wedge k=1$ $(k\in[\![1;n]\!])$

Démonstration :

* On a : $\text{Ordre}(\langle a^k\rangle) = \min\{m\in\mathbb{N}^* / (a^k)^m = e\}$
$= \min\{m\in\mathbb{N}^* / a^{km} = e\}$
$= \min\{m\in\mathbb{N}^* / n/km\}$

Posons $d = n\wedge k$. On a alors :
$\exists\, n'$ et k' tq $n = dn'$ et $k = dk'$, $n'\wedge k' = 1$ (déf. du pgcd)

Donc : n/km ssi $dn'/dk'm$
ssi $n'/k'm'$
ssi n'/m (par le théorème de Gauss car $n'\wedge k' = 1$)

donc $\text{Ordre}(\langle a^k\rangle) = \min\{m\in\mathbb{N}^* / n'/m\}$
$= n'$

donc $\text{Ordre}(\langle a^k\rangle) = \dfrac{n}{d} = \dfrac{n}{k\wedge n}$

* Montrer que G contient $\varphi(n)$ diviseurs d'ordre d si d/n :

On a : $\exists\, q\in\mathbb{N}^*$ tq $n = dq$

Soit $a^k\in G$, alors : $\text{Ordre}(\langle a^k\rangle) = d$ ssi $\dfrac{n}{n\wedge k} = d$
ssi $\dfrac{dq}{n\wedge k} = d$
ssi $\dfrac{q}{n\wedge k} = 1$
ssi $q = n\wedge k$

donc $\exists\, k'$ entier tel que $k = qk'$
d'où : $\text{Ordre}(\langle a^k\rangle) = d$ ssi $q = dq\wedge k'q$
ssi $1 = d\wedge k'$

et k marche d'entier k' (avec $k' \in [\![1; d-1]\!]$) premier avec d et $\varphi(d)$ donc G contient bien $\varphi(d)$ éléments d'ordre d si $d|n$.

* Montrer que G contient $\varphi(n)$ générateurs: les a^k tq $n \wedge k = 1$ ($k \in [\![1; n-1]\!]$):

a^k engendre G ssi a^k d'ordre n

Comme $\text{Ordre}(\langle a^k \rangle) = \frac{n}{n \wedge k}$

ala a^k engendre G ssi $n \wedge k = 1$

donc par la définition de l'indicatrice d'Euler, il y en a bien $\varphi(n)$ et ce sont les a^k tq $k \wedge n = 1$ ($k \in [\![1; n-1]\!]$).

(5) Théorème de D'Alembert-Gauss (66 leçons)

- Théorème fondamental de l'algèbre:

Tout polynôme non constant, à coefficient complexe, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

- Démonstration:

- Etude préliminaire:

Soit $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré m.

$\forall z \in \mathbb{C}^*$ on a:

$$|P(z)| = |a_m z^m + \dots + a_0|$$
$$\geq |a_m||z|^m - |a_{m-1}||z|^{m-1} - \dots - |a_1||z| - |a_0| \quad \text{(inégalité triangulaire renversée)}$$
$$\geq |z|^m \left(|a_m| - |a_{m-1}| \frac{1}{|z|} - \dots - |a_1| \frac{1}{|z|^{m-1}} - |a_0| \frac{1}{|z|^m} \right)$$

On a donc: $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.

Considérons alors $R > 0$ tel que $\forall |z| > R : |P(z)| > |P(0)|$

et soit $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq R\}$

D est une partie compacte de $\mathbb{C}$ (car bornée).

Comme $|P|$ est continue, alors:

$$\exists z_0 \in D \text{ tq } |P(z_0)| = \inf_{z \in D} |P(z)|$$

Sachant que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus D$ on a:

$$|P(z)| \geq |P(0)| \geq |P(z_0)|$$

on en déduit que $|P|$ atteint aussi sa borne inférieure sur $\mathbb{C}$ en z_0:

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$$

- Démontrons que z_0 est une racine de P par l'absurde:

Supposons que $P(z_0) \neq 0$

et posons $\forall z \in \mathbb{C}$: $Q(z) = P(z+z_0)$

On a: $Q(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$

(où $c_i \in \mathbb{C}$ $\forall i \in [\![0, n]\!]$ et $c_n \neq 0$)

Comme $P(z_0) \neq 0$, on a $c_0 \neq 0$ (car $Q(0) = P(z_0) = c_0$)

D'après l'étude préliminaire, $|Q|$ atteint sa borne inférieure sur $\mathbb{C}$ en 0:

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = |c_0|$$

Pour $k = \min\{i \in \mathbb{N}^* / c_i \neq 0\}$.

On a alors:

$$Q(z) = c_0 + c_k z^k + z^{k+1} Q_1^*(z)$$

où $Q_1^*(z) = c_{k+1} + c_{k+1} z + \dots + c_n z^{n-k-1}$

Soient maintenant α et β deux réels tels que: $c_0 = |c_0| e^{i\alpha}$

$c_k = |c_k| e^{i\beta}$

alors $\forall z = r e^{i\theta}$ de $\mathbb{C}$ on a:

$$Q(r e^{i\theta}) = |c_0| e^{i\alpha} + |c_k| e^{i\beta} r^k e^{ik\theta} + r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} Q_1(r e^{i\theta})$$

$$= e^{i\alpha} \left(|c_0| + |c_k| r^k e^{i(\beta - \alpha + k\theta)} + r^{k+1} e^{i(-\alpha + (k+1)\theta)} Q_1(r e^{i\theta}) \right)$$

d'où $|Q(r e^{i\theta})| = \underbrace{|e^{i\alpha}|}_{1} \left| |c_0| + |c_k| r^k e^{i(\beta - \alpha + k\theta)} + r^{k+1} e^{i(-\alpha + (k+1)\theta)} Q_1(r e^{i\theta}) \right|$

Posons $\theta = \dfrac{\pi + \alpha - \beta}{k}$

alors:

$$|Q(r e^{i\theta})| = \left| |c_0| + |c_k| r^k e^{i(\beta - \alpha + k \times \frac{\pi + \alpha - \beta}{k})} + r^{k+1} e^{i(-\alpha + (k+1)\theta)} Q_1(r e^{i\theta}) \right|$$

$$= \left| |c_0| - |c_k| r^k + r^{k+1} e^{i(-\alpha + (k+1)\theta)} Q_1(r e^{i\theta}) \right|$$

$$\leq \left| |c_0| - |c_k| r^k \right| + r^{k+1} \left| Q_1(r e^{i\theta}) \right|$$

et pour $0 < r < \left|\frac{c_0}{c_k}\right|^{\frac{1}{k}}$ on trouve alors :

$$|Q(re^{i\theta})| \leq |c_0| - r^k |c_k| + r^{k+1} |Q_1(re^{i\theta})|$$

$$\leq |c_0| - r^k \underbrace{\left(|c_k| - r |Q_1(re^{i\theta})| \right)}_{>0 \text{ pour } r \text{ assez petit car } |c_k| > 0}$$

d'où $|Q(re^{i\theta})| < |c_0|$

absurde par hypothèse sur $|c_0|$.

Donc $P(z_0) = 0$ et z_0 est bien une racine de P.

(6) THÉORÈME DE RIESZ (ED démonstration)

Théorème : Soit $(E;\|.\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v.n. Soit $\mathcal{B}(0;1)$ la boule unité de $(E;\|.\|)$. Alors $(E;\|.\|)$ est de dimension finie ssi $\mathcal{B}(0;1)$ est compacte.

Démonstration : $\mathcal{B}_f = \mathcal{B}(0;1)$

* Supposons que $(E;\|.\|)$ est de dimension finie :

On a $\mathcal{B}_f = \{x \in E / \|x\| \leq 1\}$ est une partie fermé bornée de E

Donc $\mathcal{B}_f$ est une partie compacte

* Supposons que $\mathcal{B}_f$ est compacte.

• $\forall x \in \mathcal{B}_f$ on a : $\mathcal{B}_f \subset \bigcup_{x \in \mathcal{B}_f} \mathcal{B}\left(x; \frac{1}{2}\right)$ (union des boules ouvertes)

Par la définition de Borel-Lebesgue dans un compact, on peut extraire un recouvrement fini de $\mathcal{B}_f$, et il existe alors une suite de points $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans $\mathcal{B}_f$ telle que : $\mathcal{B}_f \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}\left(x_i; \frac{1}{2}\right)$

• Soit $F = \operatorname{Vect}_{1 \leq i \leq N}(x_i)$ et soit $x \in \mathcal{B}_f$.

- Mq $\forall n \geq 1$, on peut écrire $x = y_n + z_n$ où $y_n \in F$ et $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$:

* si $n = 1$: on sait qu'il existe i, $1 \leq i \leq N$, tq $x \in \mathcal{B}\left(x_i; \frac{1}{2}\right)$

donc $x = x_i + z$ avec $\|z\| < \frac{1}{2}$

on pose donc $y_1 = x_i$ et $z_1 = z$

* Supposons que cette propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

on a : $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\|2^n z_n\| \leq 1$, i.e. $2^n z_n \in \mathcal{B}_f$

donc $\exists\, i_n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i_n \leq N$, tq $2^n z_n \in \mathcal{B}\left(x_{i_n}; \frac{1}{2}\right)$

i.e. $2^n z_n = x_{i_n} + z'_n$ avec $\|z'_n\| \leq \frac{1}{2}$

d'où $x = \underbrace{y_n + \frac{x_{i_n}}{2^n}}_{\in F} + \frac{z'_n}{2^n}$

car $y_n, x_{i_n} \in F$ et F est un e.v.

de plus $\left\|\frac{z'_n}{2^n}\right\| \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$

$\leq \frac{1}{2^{n+1}}$

on peut donc poser $x = y_{n+1} + z_{n+1}$ avec $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2^n} x_{i_n}$

et $z_{n+1} = \frac{1}{2^n} z'_n$

et la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Donc on vient de montrer par récurrence que la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• Montrons que $E = F$ (ce qui montrera que E de dim finie)

* On a : $F = \underset{1 \leq i \leq N}{\text{Vect}}(x_i) \subset E$ car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E$

* Soit maintenant $v \in E$.

- Si $v = 0$, alors $v \in F$ (car F s.e.v. de E)
- Si $v \neq 0$, alors posons $x = \frac{v}{\|v\|}$ ($x \in \mathcal{B}_f$)

en appliquant la propriété précédente à x, on a :

$x = y_n + z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

et $\lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} x - z_n = x$ (car $\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$)

donc x est limite d'une suite d'élts de F fermé (car s.e.v. de dimension finie)

donc $x \in F$ et $v = \|v\| x \in F$

d'où $E \subset F$

Donc $E = F$ et E est donc de dimension finie.

(7) PROJECTION ORTHOGONALE (Cours particulier)

Proposition : Si F s.e.v. de E de dimension finie et si $x \in E$, alors il existe un unique vecteur de F, noté $p_F(x)$, tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.
$p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F. On a : $E = F \oplus F^\perp$.
On a : $d(x;F) = \inf_{y \in F} d(x;y) = \min_{y \in F} d(x;y) = \|x - p_F(x)\|$

On a : $\forall x \in E : d^2(x;F) = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$
Si F n'est pas de dimension finie on peut avoir $E \neq F \oplus F^\perp$

Démonstration :

* Soit n la dimension de F ($n \geq 1$).

• **Montrons l'unicité et l'existence de $p_F(x)$:**
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F et soit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$.
On a alors : $x - v \in F^\perp$ ssi $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\langle x - v ; e_j \rangle = 0$
ssi $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\langle x ; e_j \rangle = \langle v ; e_j \rangle$
ssi $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\langle x ; e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i ; e_j \rangle$
ssi $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\langle x ; e_j \rangle = \lambda_j \langle e_j ; e_j \rangle$
si $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\langle x ; e_j \rangle = \lambda_j$
(car $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ b.o.n.)

d'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$: $p_F(x) = (x;e_1)e_1 + \dots + (x;e_n)e_n$

• On a donc : $\forall x \in E$, $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp}$

et si $a \in F \cap F^\perp$, alors $\langle a ; a \rangle = 0$, d'où $a = 0$
donc $F \cap F^\perp = \{0\}$

d'où $E = F \oplus F^\perp$

• Montrons que $p_F(x)$ minimise la distance entre x et F :

Si $y \in F$, alors on a :

$$d^2(x;y) = \|x-y\|^2$$
$$= \|\underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in F \text{ car } F \text{ s.e.v. de } p_F(x) \text{ et } y \text{ appartient à } F}\|^2$$

$$= \|x - p_F(x)\|^2 + \underbrace{\|p_F(x) - y\|^2}_{\geq 0} \text{ par le théorème de Pythagore}$$

d'où $\forall y \in F : d^2(x;y) \geq \|x - p_F(x)\|^2$

et on a égalité ssi $\|p_F(x) - y\|^2 = 0$, i.e. $p_F(x) = y$

donc $p_F(x)$ minimise la distance entre x et F.

• On a : $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ orthogonaux car $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$

donc par le théorème de Pythagore on a bien :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

i.e. $\underline{d(x;F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$

* Soit $E = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ et $F = \text{Vect}(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $e^{(n)}_k = \delta_{n,k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

(s.e.v. des suites à support fini)

Soit $u \in E$. On a : $u \in F^\perp \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \langle u ; e^{(n)} \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$

donc $F^\perp = \{0\}$

Or la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E mais pas de F

donc $\underline{E \neq F \oplus F^\perp}$

(8) Inégalités de Hölder & Minkowski (Hölder ou Télé Analyse)

- Inégalité de Hölder :

Soient deux réels positifs p et q tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors $\forall$ réels positifs $a_1,\dots,a_m$ et $b_1,\dots,b_m$ on a :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

- Inégalité de Minkowski :

Soit p un réel ≥ 1 et soient $x_1,\dots,x_m$ et $y_1,\dots,y_m$ des réels positifs. Alors on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Démonstration de Hölder :

La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\frac{\ln(x)}{p}+\frac{\ln(y)}{q} \leq \ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)$$

d'où $e^{\frac{\ln x}{p}+\frac{\ln y}{q}} \leq e^{\ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)}$ car la fonction exponentielle est croissante

i.e. $e^{\frac{\ln x}{p}} \cdot e^{\frac{\ln y}{q}} \leq \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$

i.e. $x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$ (*) (inégalité vraie aussi si x ou y nul)

Pour $x=\dfrac{a_i^p}{\sum_{j=1}^{m} a_j^p}$ et $y=\dfrac{b_i^q}{\sum_{j=1}^{m} b_j^q}$

Par l'inégalité (*) on obtient : $\dfrac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \dfrac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \dfrac{a_i^p}{p\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^p\right)} + \dfrac{b_i^q}{q\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^q\right)}$

d'où $\sum_{i=1}^{m} \left(\dfrac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \dfrac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\dfrac{a_i^p}{p\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^p\right)} + \dfrac{b_i^q}{q\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^q\right)}\right)$

d'où $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_i b_i}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$

d'où $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

- Démonstration Minkowski :

Si $p=1$ l'inégalité est évidente, donc on suppose $p>1$.
Posons q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ i.e. $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}$, i.e. $q=\frac{p}{p-1}$
On utilise l'inégalité de Hölder deux fois :

(1) $\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i+y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$

(2) $\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i+y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$

D'où par sommation de (1) et (2) on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)(x_i+y_i)^{p-1} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

d'où $$\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$ car $p=q(p-1)$

si les x_i et y_i sont non tous nuls (sinon inégalité est évidente) alors on a par simplification :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

i.e. $$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

car $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$

⑨ Fonction Indicatrice d'Euler (Burg & Artificier Lionel)

- Théorème d'Euler:

Si p est un nombre premier alors $\varphi(p) = p-1$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$ on a: $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Si m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition en facteurs premiers de n alors on a: $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$

- Démonstration:

* Soit p un entier naturel premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps et tout élément non nul est inversible et générateur du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donc: $\underline{\varphi(p) = p-1}$

* Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Les diviseurs de p^α sont dans l'ensemble $\{1; p; \dots; p^\alpha\}$ car p est un nombre premier.

$\forall k \in [\![1; p^\alpha]\!]$, k et p^α premiers entre eux ssi k est non multiple de p, i.e. ssi $k \notin \{p; 2p; 3p; \dots; p^{\alpha-1} p\}$

donc il y a $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ entiers premiers avec p^α

d'où $\underline{\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}}$

* Si m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors l'isomorphisme d'anneaux $f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ du théorème Chinois définit aussi un isomorphisme de groupes :

$$f^* : \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \to \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

donc : $\text{Card}\left(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})\right) = \text{Card}\left(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\right) \times \text{Card}\left(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right)$

d'où : $\underline{\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)}$

* Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ alors comme les p_i sont premiers entre eux (et premiers et distincts) on a : $p_1^{\alpha_1} \wedge \left(p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}\right)$

d'où $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\varphi\left(p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}\right)$

et de proche en proche on trouve :

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \dots \varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}\left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) \\
\varphi(n) &= n \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right)
\end{aligned}$$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient les fractions : $\frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n}{n}$ qu'on écrit sous forme irréductible $\frac{a}{b}$ avec b/n

Comme $a \wedge b = 1$ et $a \leq b$ il y a $\varphi(b)$ fractions de dénominateur b

Réciproquement : $\forall b$ entier tq b/n, les $\varphi(b)$ fractions $\frac{a}{b}$ avec $a \in [\![1; b]\!]$ et $a \wedge b = 1$ correspondent chacune à une fraction $\frac{k}{n}$ $(k \in [\![1; n]\!])$

donc $\underbrace{\left\{\frac{a}{b} \in [0;1] \,/\, b/n \text{ et } a \wedge b = 1\right\}}_{A} = \underbrace{\left\{\frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n}{n}\right\}}_{B}$

d'où $\text{Card}\, A = \text{Card}\, B$, d'où $\underline{\sum_{b/n} \varphi(b) = n}$

(10) INDICATRICE D'EULER & PROBABILITÉS

(66 leçons)

-Théorème: Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n avec $k \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_k$ premiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$.
Alors on a: $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

-Démonstration:
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
On considère $\Omega = [\![1; n]\!]$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme.
Soit l'évènement $A =$ "Le nombre choisi est premier avec n"
et $\forall i \in [\![1; k]\!]$, l'évènement:
$A_i =$ "le nombre choisi est divisible par p_i"

On a: $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\varphi(n)}{n}$

et $\forall i \in [\![1; k]\!]$: $P(A_i) = \frac{\text{Card } A_i}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{Card } A_i}{n}$

On remarque que $A_i = \left\{ \lambda p_i \,/\, 1 \leq \lambda \leq \frac{n}{p_i} \right\}$

d'où $\text{Card } A_i = \frac{n}{p_i}$ et $P(A_i) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i}$

L'évènement $A_1 \cap \dots \cap A_k$ est réalisé ssi le nombre choisi est divisible par tous les p_i $(1 \leq i \leq k)$
Les p_i étant premiers entre eux, cela signifie que le nombre choisi est divisible par leur produit par le Théorème de Gauss.

d'où : $A_1 \cap \dots \cap A_k = \left\{ \lambda p_1 \cdots p_k \;/\; 1 \leq \underset{\in \mathbb{N}^*}{\lambda} \leq \frac{n}{p_1 \cdots p_k} \right\}$

et donc $\operatorname{Card}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \dfrac{n}{p_1 \cdots p_k}$

et $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \dfrac{\operatorname{Card}(A_1 \cap \dots \cap A_k)}{\operatorname{Card}\Omega}$

$$= \frac{1}{p_1 \cdots p_k}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P(A_i)$$

On en déduit que les événements $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants dans leur ensemble.

- Maintenant, le nombre choisi est premier avec n ssi il n'est divisible par aucun des p_i $(1 \leq i \leq k)$, i.e.

$$A = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}$$

Les événements A_i $(1 \leq i \leq k)$ étants indépendants, leurs complémentaires le sont aussi, donc :

$$P(A) = \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

On $P(A) = \dfrac{\varphi(n)}{n}$

d'où $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

d'où $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

---

(11) CARACTÉRISATION DES APP. LINÉAIRES CONTINUES (Dantzel)

- Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$ où $(E;\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ sont deux e.v.n. sur $\mathbb{R}$.
On a équivalence entre :

(1) f est lipschitzienne sur E
(2) f est uniformément continue sur E
(3) f est continue sur E
(4) f est continue en 0
(5) f est bornée sur la boule unité fermée de E
(6) f est bornée sur la sphère unité de E
(7) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M.\|x\|_E$

- Démonstration :

* Supposons f lipschitzienne sur E, alors :
$\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R} : \|f(x)-f(y)\|_F \leq k.\|x-y\|_E$
donc :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}$ on ait :
$$\|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leq \varepsilon$$
(il suffit prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$)
donc f est uniformément continue et
$$(1) \Rightarrow (2)$$

* Si f est uniformément continue, alors elle est continue et en particulier continue en 0, donc :
$$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$$

* Supposons f continue en 0, alors :
$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in E, \|x-0\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(0)\|_F \leq 1$
i.e. $\|x\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$
(car f linéaire, donc $f(0)=0$)

donc : $\forall y \in \mathcal{B}f(0;1)$ on a : $\|f(y)\|_F = \|f(\frac{\alpha y}{\alpha})\|_F$

$= \frac{1}{\alpha} \underbrace{\|f(\alpha y)\|_F}_{\leq 1 \text{ car } \|\alpha y\|_E \leq \alpha}$

d'où $\|f(y)\|_F \leq \frac{1}{\alpha}$

donc f est bornée sur la boule unité $\mathcal{B}(0;1)$ et :

$(4) \Rightarrow (5)$

* Supposons f bornée sur la boule unité $\mathcal{B}(0;1)$: $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in \mathcal{B}(0;1)$ $\|f(x)\|_F \leq M$

On a : $S(0;1) \subset \mathcal{B}(0;1)$

donc $\sup_{x \in S(0;1)} \|f(x)\|_F \leq \sup_{x \in \mathcal{B}(0;1)} \|f(x)\|_F \leq M$

donc f est bornée sur la sphère unité et :

$(5) \Rightarrow (6)$

* Supposons f bornée sur la sphère unité $S(0;1)$: $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in S(0;1)$, $\|f(x)\|_F \leq M$

- Soit $x \in E$ non nul. On a :

$\|f(x)\|_F = \|f(\|x\|_E \frac{x}{\|x\|_E})\|_F$

$= \|x\|_E \cdot \underbrace{\|f(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F}_{\leq M \text{ car } \frac{x}{\|x\|_E} \in S(0;1)}$

donc $\|f(x)\|_F \leq M . \|x\|_E$

- Si x nul, on a : $\|f(0_E)\|_F = 0 \leq M . \|0_E\|_E$

Donc $\forall x \in E$ on a bien $\|f(x)\|_F \leq M . \|x\|_E$ et :

$(6) \Rightarrow (7)$

* Supposons : $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \in E$: $\|f(x)\|_F \leq M . \|x\|_E$

alors : $\forall (x,y) \in E^2$ on a : $\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq M . \|x-y\|_E$

et donc f est lipschitzienne, d'où :

$(7) \Rightarrow (1)$

(12) NORME SUBORDONNÉE (Dantzer)

- Proposition :

* Si $f \in \mathcal{L}_c(E;F)$ on a : $\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty$

* L'ensemble $\mathcal{L}_c(E;F)$ est un espace vectoriel et l'application $\|.\|_{\mathcal{L}_c}$ définie sur cet e.v. par :

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E;F) : \|f\|_{\mathcal{L}_c} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$

est une norme sur cet e.v. appelée norme subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

- Démonstration :

* Les trois bornes supérieures sont finies par le théorème de caractérisation des applications linéaires continues.

Soit $S = S(0;1)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0;1)$

• on a : $S \subset \mathcal{B}$ donc $\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$

- si $a \neq 0_E$ est un élément de $\mathcal{B}$, on a :

$$\|f(a)\|_F = \underbrace{\|a\|_E}_{\leq 1} \cdot \left\| f\left(\frac{a}{\|a\|_E}\right) \right\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$

et $\|f(0_E)\|_F = 0 \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$

donc $\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$

• on a : $S \subset E \setminus 0_E$, donc : $\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F \leq \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$

- si $a \neq 0_E$ est un élt de E on a :

$$\frac{\|f(a)\|_F}{\|a\|_E} = \left\| f\left(\underbrace{\frac{1}{\|a\|_E} a}_{\text{de norme } 1} \right) \right\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$

d'où $\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$

donc $\sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$

* on montre facilement que $\mathcal{L}_c(E;F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E;F)$
Montrons que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E;F)$.

- Si $\|f\|_{\mathcal{L}_c}=0$ alors: $\forall x\in E, \|f(x)\|_F \leq 0.\|x\|_E$ (car $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_c}$ $\forall x\neq 0$ dc)
  d'où $f=0$
  Si $f=0$ alors $\|f\|_{\mathcal{L}_c}=0$ par définition de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$
  donc on a montré la séparation

- Soit $f\in\mathcal{L}_c(E;F)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. on a:
  $\forall x\in S, \|\lambda f(x)\|_F = |\lambda|.\|f(x)\|_F \leq |\lambda|.\|f\|_{\mathcal{L}_c}$
  (car $\|\cdot\|_F$ norme) (par définition de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$ sur S)
  donc $|\lambda|.\|f\|_{\mathcal{L}_c}$ est un majorant de l'ensemble: $\{\|\lambda f(x)\|_F / x\in S\}$ d'ailleurs de S
  Comme $\|f\|_{\mathcal{L}_c} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$, il existe une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que: $\lim_{m\to+\infty} \|f(x_m)\|_F = \|f\|_{\mathcal{L}_c}$
  d'où $\lim_{m\to+\infty} \|\lambda f(x_m)\|_F = |\lambda|.\|f\|_{\mathcal{L}_c}$
  d'où par la caractérisation de la borne supérieure on a:
  $|\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}_c} = \sup_{\|x\|_E=1} \|\lambda f(x)\|_F$
  d'où $|\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}_c} = \|\lambda f\|_{\mathcal{L}_c}$
  et la homogénéité est démontrée

- Soient f et g deux applications de $\mathcal{L}_c(E;F)$. on a:
  $\forall x\in S, \|(f+g)(x)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F$ (car $\|\cdot\|_F$ norme)
  $\leq \|f\|_{\mathcal{L}_c} + \|g\|_{\mathcal{L}_c}$ (déf. de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$ sur S)
  d'où $\|f+g\|_{\mathcal{L}_c} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_c} + \|g\|_{\mathcal{L}_c}$
  et l'inégalité triangulaire est démontrée

Donc $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E;F)$

(13) Décomposition Permutation & Famille Minimale Génératrice (66 leçon + Cours particulier)

- Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.
Toute permutation σ de $(S_n ; \circ)$ se décompose de manière unique (à l'ordre près des facteurs) en produit de cycles à supports disjoints deux à deux.
De plus $\{(1\ i) / i \in [\![2 ; n]\!]\}$ est une famille minimale génératrice de S_n.

- Démonstration :

- On montre l'existence de la décomposition :

Soit $\sigma \in S_n$.
Comme $[\![1 ; n]\!]$ est fini, il existe $r \in [\![1 ; n]\!]$ tq il y ait r orbites.
Soient $O_1, \dots, O_r$ les orbites. On a alors : $[\![1 ; n]\!] = \bigcup_{i=1}^{r} O_i$ (union disjointe)
Pour tout $i \in [\![1 ; r]\!]$ on définit c_i par : $c_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) \text{ si } x \in O_i \\ x \text{ si } x \notin O_i \end{cases}$

- Si $x \notin O_i$, alors $\mathrm{Orb}_{c_i}(x) = \{x\}$
- Si $x \in O_i$, alors $c_i(x) = \sigma(x)$, et donc $\mathrm{orb}_{c_i}(x) = \mathrm{orb}_{\sigma}(x) = O_i$

donc il y a au plus une c_i-orbite non réduite à un point, donc c_i est soit un cycle, soit l'identité.
Posons $s = c_1 \circ c_2 \circ \dots \circ c_r$.
Soit $x \in [\![1 ; n]\!]$, alors $\exists$ un unique $i \in [\![1 ; r]\!]$ tq $x \in O_i$.
On a alors : $\begin{cases} \forall j \in [\![1 ; n]\!] \text{ tq } j \neq i,\ c_j(x) = x \\ c_i(x) = \sigma(x) \\ \forall j \in [\![1 ; n]\!] \text{ tq } j \neq i,\ c_j(\sigma(x)) = \sigma(x) \text{ car } \sigma(x) \in O_i \end{cases}$
donc : $s(x) = \sigma(x)$

- On montre l'unicité de la décomposition :

Soient $d_1, \dots, d_q$ cycles à supports disjoints 2 à 2 tq $\sigma = d_1 \circ \dots \circ d_q$
et soit $x \in [\![1 ; n]\!]$

il existe un unique $j \in [\![1;q]\!]$ tq $x \in Supp(d_j)$
et seul d_j a un effet sur x (car les d_i sont 2 à 2 disjoints)
donc : $\sigma(x) = d_j(x)$ et, par récurrence, $\sigma^k(x) = d_j^k(x)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
D'où : $Orb_\sigma(x) = Orb_{d_i}(x) = Supp(d_j)$
On en déduit que $Supp(d_1), \dots, Supp(d_q)$ sont les σ-orbites, donc $d = q$
et $\forall i \in [\![1;q]\!]$ on a : $Supp(d_i) = O_i$
Donc $\forall i \in [\![1;q]\!]$, $d_i = a_i$
d'où l'unicité.

- Montrons que $(S_n; \circ)$ est engendré par les transpositions :

Montrons que tout cycle se décompose en produit de transpositions.
Soit $c = (a_1; a_2; \dots; a_p)$ un p-cycle de S_n, alors :

$$c = (a_1; a_2) \circ (a_2; a_3) \circ \dots \circ (a_{p-1}; a_p)$$

car : $\begin{cases} \forall i \in [\![1; p-1]\!] : (a_1; a_2) \circ (a_2; a_3) \circ \dots \circ (a_{p-1}; a_p)(a_i) = a_{i+1} = c(a_i) \\ (a_1; a_2) \circ (a_2; a_3) \circ \dots \circ (a_{p-1}; a_p)(a_p) = a_1 = c(a_p) \\ \forall x \notin Supp(c) : (a_1; a_2) \circ \dots \circ (a_{p-1}; a_p)(x) = x = c(x) \end{cases}$

- Montrons que $A = \{(1;i) / i \in [\![2;n]\!]\}$ est une partie génératrice minimale de S_n :

Si $(i;j) \in [\![2;n]\!]^2$ et $i \neq j$, alors : $(1;i)(1;j)(1;i) = (i;j)$
donc le groupe engendré par A contient toutes les transpositions, donc c'est S_n par le point précédent. Donc A est génératrice.
Si on considère $A' = A \setminus (1;i)$ où $i \in [\![2;n]\!]$, alors i est un point fixe du groupe engendré par A', donc ce groupe n'est pas S_n.
Donc A est minimale.

(14) RÈGLE D'ABEL & EXEMPLE (Dantzer / 66 Exos)

-Théorème: Règle d'Abel

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou un e.v.n. complet). On suppose que:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \alpha_n v_n$$

où: $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite positive, décroissante, et convergente vers 0

$$\exists M\in\mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall n\in\mathbb{N},\ |S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leq M$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente

-Démonstration: (Dantzer)

- On montre que la suite des sommes partielles $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n\in\mathbb{N}\ S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, est convergente.

on a: $\forall n\geq 2$:

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (S_k - S_{k-1}) + \alpha_0 v_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{k-1} + \alpha_0 v_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k + \alpha_0 v_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n - \alpha_1 v_0 + \alpha_0 v_0 \end{aligned}$$

La suite $(\alpha_n S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0 car la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On va donc montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2}$ définie par: $\forall n\geq 2$ $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$ est convergente.

- On montre que la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy.

Admis, Soit M un réel positif tq : $\forall n \in \mathbb{N}, |S_n| \leq M$

Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, positive et convergente vers 0, soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n \geq n_0$, $0 \leq \alpha_n \leq \varepsilon$

Alors on a :

$$\forall n \geq n_0, \forall p > n, \quad |A_p - A_n| = \left| \sum_{k=n}^{p-1} \underbrace{(\alpha_k - \alpha_{k+1})}_{\geq 0} S_k \right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{p-1} M(\alpha_k - \alpha_{k+1})$$

$$\leq M(\alpha_n - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \dots + \alpha_{p-1} - \alpha_p)$$

$$\leq M(\alpha_n - \alpha_p)$$

$$\leq M\alpha_n \quad (\text{car } \alpha_n > \alpha_p)$$

$$\leq M\varepsilon$$

donc la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy, donc convergente car $\mathbb{K}$ est complet.

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et la série $\sum u_n$ est convergente.

- Exemple : Etude de la série de tg $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ où $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ (66 façons)

* si $\alpha \leq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge.

* si $\alpha > 1$: on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (Série de Riemann)

donc par comparaison, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

* si $\alpha \in]0;1]$:

- si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$: $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ série de Riemann divergente

donc $\sum u_n$ diverge.

- si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \cdot e^{in\theta}$

en posant $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite positive, décroissante et convergente vers 0

$b_n = e^{in\theta}$: $|b_0 + \dots + b_n| = \left|1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}\right|$

$$= \left|\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \quad (\text{série géométrique})$$

$$= \left|\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}\right|$$

$$\leq \frac{2}{1\left|\sin\frac{\theta}{2}\right||2i|}$$

$$\leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

donc $S_n = \sum b_n$ bornée

donc par le théorème d'Abel, la série $\sum u_n$ est convergente

(15) THÉORÈME BASE INCOMPLÈTE, BASES & LEMME DE STEINITZ (Cours particulier)

- Théorème de la base incomplète :

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie et $\mathcal{L}$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-e.v. E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Il existe une famille $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cap \mathcal{G}' = \emptyset$ et $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{G}'$ soit une base de E.

- Démonstration :

On considère $\mathcal{A} = \{ \mathcal{P} \subset \mathcal{G} / \mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \emptyset \text{ et } \mathcal{L} \cup \mathcal{P} \text{ libre} \}$

. On a : $\emptyset \in \mathcal{A}$ car : $\mathcal{L} \cap \emptyset = \emptyset$
$\mathcal{L} \cup \emptyset = \mathcal{L}$ libre
donc $\mathcal{A}$ non vide.

. $\mathcal{G}$ étant finie, l'ensemble $\{ \text{Card}(\mathcal{P}) / \mathcal{P} \in \mathcal{A} \}$ a un plus grand élément p.

- Considérons $\mathcal{G}' \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{G}'$ ait p éléments. On va montrer que $\mathcal{G}'$ convient :

* On a : $\mathcal{L} \cap \mathcal{G}' = \emptyset$ et $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}'$ libre car $\mathcal{G}' \in \mathcal{A}$

* Supposons que $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{G}'$ n'engendre pas E.
alors : $\exists x \in \mathcal{G}$ tq $x \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$ (par la définition de $\mathcal{G}$)
et $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{x\}$ est libre
et $\mathcal{G}' \cup \{x\} \in \mathcal{A}$: impossible car $\mathcal{G}' \cup \{x\}$ de cardinal $p+1$!

Donc $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}'$ engendre E

- Corollaire : Dans tout e.v. de dimension finie, il existe au moins une base finie.

- Preuve : on applique le théorème de la base incomplète avec $\mathcal{L} = \emptyset$ si $\mathcal{G}$ partie génératrice finie, $\exists\, \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{B} = \mathcal{G}'$ soit une base de E

- Lemme de Steinitz :
Soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice finie de E, $\mathbb{K}$-e.v..
Pour $x \in \mathcal{G}$ et $y = \sum_{z \in \mathcal{G}} \alpha_z z$, si $\alpha_x \neq 0$, alors :
$(\mathcal{G} \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ est génératrice de E.

- Preuve : Soit $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \setminus \{x\}$ et $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \cup \{y\}$
On a : $y = \sum_{z \in \mathcal{G}} \alpha_z z$. Comme $x \in \mathcal{G}$ et $\alpha_x \neq 0$, on a :

$$x = \frac{1}{\alpha_x}\left(y - \sum_{z \in \mathcal{G}_1} \alpha_z z\right)$$

donc $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{G}_2)$

donc $\mathcal{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{G}_2)$, i.e. $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{G}_2)$
$\mathcal{G}$ étant génératrice (finie) de E, on a : $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$
d'où $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{G}_2)$
et donc $\mathcal{G}_2$ est génératrice de E.

16 Théorèmes de Gerschgorin & Hadamard

Coral en poche pour les oraux / Cours particulier et MP ... [illegible]

- Théorème de Gerschgorin :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors on a : $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{K} \,/\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$

- Démonstration :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \mathcal{D}_i = \left\{ x \in \mathbb{K} \,/\, |a_{ii} - x| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

$$= \mathcal{B}_f\Big(a_{ii} ; \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\Big)$$

Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ valeur propre de A associée à λ.

(avec donc $X \neq 0$)

On a : $\exists\, k \in [\![1;n]\!]$ tq $|x_k| = \underset{i \in [\![1;n]\!]}{\operatorname{Max}} |x_i| > 0$ (car $X \neq 0$)

On a : $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k$ ($k^{ième}$ ligne de $AX = \lambda X$)

$$\Longleftrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k - a_{kk} x_k$$

d'où $|x_k| |\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j \right|$

d'où $|x_k| |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| |x_j|$

d'où $|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \underbrace{\frac{|x_j|}{|x_k|}}_{\leq 1}$ (car $|x_k| \neq 0$) (car $|x_k| = \operatorname{Max} \ldots$)

d'où $|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$

donc $\lambda \in \mathcal{B}_f\left(a_{kk}; \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\right)$

et donc : $\underline{Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{x \in \mathbb{K} / |x - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right\}}$

- Théorème de Hadamard :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$

alors A est inversible.

- Démonstration :

- On va montrer que 0 n'est pas valeur propre de A :

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$

Soit $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$

On a : $AX = 0 \Rightarrow |a_{pp} x_p| = \left| \sum_{j\neq p} a_{pj} x_j \right|$

$$|a_{pp}||x_p| \leq \sum_{j\neq p} |a_{pj}||x_j|$$

$$|a_{pp}||x_p| \leq |x_p| \sum_{j\neq p} |a_{pj}|$$

d'où $|x_p|\left(\underbrace{|a_{pp}| - \sum_{j\neq p} |a_{pj}|}_{> 0 \text{ par hypothèse}}\right) \leq 0$

d'où $|x_p| \leq 0$

donc $x_p = 0$ et $X = 0$

donc $0 \notin Sp(A)$ et A est inversible.

(17) RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES, THÉORÈME SPECTRAL (BURG)

- Théorème 1 : Si $u \in S(E)$, alors $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$

- Preuve : E est euclidien, donc pour tout sous-espace F de E on a : $E = F \oplus F^\perp$

Par un théorème

Vrai aussi si $F = \operatorname{Im} u$

On a : $F^\perp = (\operatorname{Im} u)^\perp = \ker u$

d'où $E = \ker u \oplus (\operatorname{Im} u)^\perp$

- Si $x \in \ker u$:
  $\forall y \in E, (u(x)|y) = 0 = (x|u(y))$
  donc $x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$ car $u(y) \in \operatorname{Im} u$
  donc $\ker u \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$
- Si $x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$
  $\forall y \in E, (x|u(y)) = 0 = (u(x)|y) = 0$
  $\Rightarrow u(x) = 0$
  $\Rightarrow (\operatorname{Im} u)^\perp \subset \ker u$

- Théorème 2 : Si F est un sous-espace stable par $u \in S(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u.

- Preuve : Soit $x \in F^\perp$, alors : $\forall y \in F, (u(x)|y) = (x|u(y)) = 0$ car $u(y) \in F$ par stabilité

donc $u(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ stable par u

- Théorème 3 : Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est scindé sur $\mathbb{R}$. Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

- Preuve : - Montrons que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est scindé sur $\mathbb{R}$:

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

On a : $A = {}^tA$ et $\chi_u = \chi_A$ (polynôme caractéristique de u)

On considère A comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

donc par le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$.
Soit λ une valeur propre de u (de A). Alors: $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ / :
$$AX = \lambda X$$

d'où, comme A est symétrique réelle:

$$\begin{aligned}
AX &= \lambda X \\
\overline{AX} &= \overline{\lambda X} \\
{}^t X \overline{AX} &= {}^t X \overline{\lambda X} \\
{}^t X A \overline{X} &= \overline{\lambda}\, {}^t X \overline{X} \\
{}^t (AX) \overline{X} &= \lambda\, {}^t X \overline{X} \\
{}^t (\lambda X) \overline{X} &= \lambda\, {}^t X \overline{X} \\
\lambda\, {}^t X \overline{X} &= \lambda\, {}^t X \overline{X}
\end{aligned}$$

d'où $(\lambda - \overline{\lambda})\, {}^t X \overline{X} = 0$. Comme ${}^t X \overline{X} > 0$ (car $X = \{0\}$)
alors on a $\lambda = \overline{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
donc les valeurs propres de u (de A) sont réelles, donc
χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

- Montrons que les sous-espaces propres associés à 2 valeurs propres distincts sont orthogonaux:
Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u, alors:
$\forall x \in E_\lambda, \forall y \in E_\mu$ (non nuls) on a:
$(u(x)|y) = (x|u(y))$ car u symétrique
d'où $(\lambda x|y) = (x|\mu y)$
i.e. $\lambda (x|y) = \mu (x|y)$
d'où $(x|y) = 0$ car $\lambda \neq \mu$
donc les sous-espaces sont orthogonaux

- Théorème 4: Tout endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E est diagonalisable et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u.

- Preuve: On le démontre par récurrence:

- si $n=1$: évident
- si on suppose que c'est vrai pour tout espace euclidien de dimension $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) et tout endomorphisme symétrique sur cet espace.

Soit E de dimension n et $u \in S(E)$.
χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ (t-hèo 3), donc il existe (au moins) un vecteur propre que l'on norme et que l'on nomme e_n.
Considérons $F = \text{Vect}(e_n) = \mathbb{R}e_n$
F étant stable par u, alors $F^\perp$ aussi :
$F^\perp$ est de dimension $n-1$ et on considère $u' = u|_{F^\perp}$ l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$.
On a alors u' symétrique car :
$\forall x, y \in F^\perp$, $(u'(x)|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|u'(y))$
Or que l'hypothèse de récurrence appliquée à $F^\perp$:
$\exists \mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1})$ base orthonormée de $F^\perp$ formée de vecteurs propres de u'
Comme $e_n \in (F^\perp)^\perp = F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

(18) RÉDUCTION DE DUNFORD (66 leçon)

- Théorème de Jordan-Dunford :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Si u admet un polynôme caractéristique scindé,
alors il existe un unique couple d'endomorphisme (d,v) tq
* v nilpotent
* d diagonalisable
* $u = v + d$
* $v \circ d = d \circ v$

- Démonstration :

* Comme le polynôme caractéristique de u est scindé, alors on a :

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les racines $(\lambda_k)_{1 \le k \le r}$, $r \in [\![1;n]\!]$, sont 2 à 2 distinctes

Pour tout $(i;j) \in [\![1;r]\!]^2$ tel que $i \neq j$ les polynômes
$(X - \lambda_i)^{m_i}$ et $(X - \lambda_j)^{m_j}$ sont premiers entre eux

donc par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\ker(\chi_u(u)) = E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker((u - \lambda_k Id_E)^{m_k})$$

Pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, $\ker((u - \lambda_k Id_E)^{m_k})$ stable par u
(car noyau d'un polynôme en u commutant avec u), donc
on peut considérer l'endomorphisme u_k de $\ker((u - \lambda_k Id_E)^{m_k})$
induit sur $\ker((u - \lambda_k Id_E)^{m_k})$

On a alors : $\underbrace{(u_k - \lambda_k Id_E)}_{p_k}{}^{m_k} = 0$, donc p_k est nilpotent

donc on a : $u_k = \underbrace{u_k - \lambda_k Id_E}_{\text{nilpotent } (p_k)} + \underbrace{\lambda_k Id_E}_{\text{homothétie}}$

* Si on note $M_k = Mat_{\mathcal{B}_k}(u_k)$ et $G_k = Mat_{\mathcal{B}_k}(f_k)$ dans une base $\mathcal{B}_k$ de $\ker((u-\lambda_k Id_E)^{m_k})$ on a alors: $M_k = \lambda_k Id_{m_k} + G_k$

avec $G_k^{m_k} = 0$

En regroupant les bases $(\mathcal{B}_k)_{1\le k\le n}$ afin d'obtenir une base de E on obtient:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 Id_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n Id_{m_n} \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} G_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_n \end{pmatrix}}_{V}$$

où M est la matrice de u dans $\mathcal{B}$

* On vérifie que les propriétés du théorème sont vérifiées:
  * D est diagonale
  * Si $m = \max_{1\le k\le n}\{m_k\}$ on a: $V^m = \begin{pmatrix} G_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_n^m \end{pmatrix} = 0$

    donc V est nilpotente
  * On a: $DV = \begin{pmatrix} \lambda_1 G_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n G_n \end{pmatrix} = VD$

    donc $DV = VD$

    et la commutativité entre $Vect\,D$ est établie
  * Si d est l'endomorphisme de E ayant pour matrice D dans $\mathcal{B}$, et v celui ayant pour matrice V dans $\mathcal{B}$, alors on a bien:

    $u = d + v$

    d diagonalisable

    v nilpotent

    $d \circ v = v \circ d$

* Unicité (Coordon Algèbre):

(si (d', v') autre couple) $\Rightarrow$ on a: $u \circ d' = d' \circ u$, donc $\forall k$, $\ker(\mathcal{P}_k^{m_k})$ stable par d'

Comme $d|_{\ker(\mathcal{P}_k^{m_k})} = \lambda_k Id_{\ker(\mathcal{P}_k^{m_k})}$ alors $d \circ d' = d' \circ d$ sur $\ker(\mathcal{P}_k^{m_k})$

ceci étant vrai $\forall k$, c'est vrai sur $E = \bigoplus \ker \mathcal{P}_k^{m_k}$, donc d et d' commutent

d et d' diagonalisable, il sont diagonalisables dans une même base, donc $d - d'$ diagonalisable

On a: ~~$M = d + v$, $M' = d' + v'$~~ $v = u - d$, $v' = u - d'$, $d \circ d' = d' \circ d \Rightarrow v \circ v'$ commutent

(19) PROPRIÉTÉS COVARIANCE ET ESPÉRANCE DANS E_2 (Probas ★ Stabl)

- Proposition: $\forall (X;Y) \in E_2^2$ on a:
  - ★ $Cov(X;Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))$ (Kön's-Huygens)
  - ★ $Cov(X;X) = V(X)$
  - ★ $Cov(X;a) = 0$ si $a \in \mathbb{R}$
  - ★ $E(|XY|) \leq \frac{1}{2}(E(X^2)+E(Y^2))$
  - ★ $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

- Démonstration:

Soient $(X;Y) \in E_2^2$:

★ On a: $E(X-E(X))(Y-E(Y)) = E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y))$
$= E(XY) - E(XE(Y)) - E(E(X)Y) + E(E(X)E(Y))$ (linéarité de E)
$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$
$= E(XY) - E(X)E(Y)$
$= Cov(X;Y)$

★ $Cov(X;X) = E(XX) - E(X)E(X)$
$= E(X^2) - (E(X))^2$
$= V(X)$

★ Si $a \in \mathbb{R}$: $Cov(X;a) = E(Xa) - E(X)E(a)$
$= aE(X) - aE(X)$
$= 0$

★ Si $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_i / i \in J\}$ où I, J parties de $\mathbb{N}$
- On montre déjà que $E(XY)$ existe:
on a $\forall (i;j) \in I \times J$: $|x_i y_j| \leq \frac{1}{2}(x_i^2 + y_j^2)$ { car $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$, d'où $a^2+b^2 \geq 2ab$

Soient I' partie finie incluse dans I
J' partie finie incluse dans J

alors: $\sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} |x_i y_j| p_{ij} \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} x_i^2 p_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} y_j^2 p_{ij}$
$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in I'} x_i^2 \sum_{j \in J} p_{ij} + \sum_{j \in J'} y_j^2 \sum_{i \in I} p_{ij} \right)$

$\sum_{i\in I'} p_{ij} \le \sum_{i\in I} p_{ij}$ car $I' \subset I$

$$\le \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in I'} x_i^2 p_{i\cdot} + \sum_{j\in J'} y_j^2 p_{\cdot j}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in I} x_i^2 p_{i\cdot} + \sum_{j\in J} y_j^2 p_{\cdot j}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(E(X^2) + E(Y^2)\right)$$

donc la famille $(x_i y_j p_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ est bien sommable

- Maintenant, l'inégalité précédente étant valable pour toutes les paires finies I' et J', alors :

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} |x_i y_j| p_{ij} \le \frac{1}{2}\left(E(X^2) + E(Y^2)\right)$$

i.e. $E(|XY|) \le \frac{1}{2}\left(E(X^2) + E(Y^2)\right)$

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $\underbrace{E((X+\lambda Y)^2)}_{\ge 0} = E(X^2 + \lambda^2 Y^2 + 2\lambda XY)$

$= E(X^2) + \lambda^2 E(Y^2) + 2\lambda E(XY)$

- <u>si $E(Y^2) = 0$</u> alors $Y = 0$ et alors : $E(X\times 0) = 0 \le \sqrt{E(X^2)+E(0^2)}$
- <u>si $E(Y^2) \neq 0$</u>, le polynôme en λ : $\lambda^2 E(Y^2) + 2\lambda E(XY) + E(X^2)$ est positif ou nul

donc son discriminant est négatif ou nul,

i.e. : $\Delta = (2E(XY))^2 - 4E(Y^2)E(X^2)$

$= 4(E(XY))^2 - 4E(Y^2)E(X^2)$

$= 4\left((E(XY))^2 - E(Y^2)E(X^2)\right) \le 0$

d'où $(E(XY))^2 \le E(X^2)E(Y^2)$

i.e. $|E(XY)| \le \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

(20) LEMME DES NOYAUX (66 leçons)

- Lemme des noyaux :

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes 2 à 2 premiers entre eux. Alors si u est un endomorphisme d'un e.v. E, alors on a :

$$\operatorname{Ker}\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}\left(P_k(u)\right)$$

- Démonstration :

* Si $r=1$ le résultat est évident
* Si $r=2$, comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, $\exists\, A_1, A_2$ polynômes tels que :

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = 1$$

donc $$(A_1 P_1)(u) + (A_2 P_2)(u) = Id_E \quad (1)$$

- Montrons que $\operatorname{Ker}(P_1(u)) + \operatorname{Ker}(P_2(u)) = \operatorname{Ker}((P_1 P_2)(u))$

. Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1(u)) + \operatorname{Ker}(P_2(u))$
alors $\exists\, x_1 \in \operatorname{Ker}(P_1(u))$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(P_2(u))$ tq $x = x_1 + x_2$
et : $(P_1 P_2)(u)(x) = (P_1(u) \circ P_2(u))(x_1 + x_2)$
$= (P_2(u) \circ P_1(u))(x_1) + (P_1(u) \circ P_2(u))(x_2)$
$= 0$

donc $x \in \operatorname{Ker}(P_1 P_2)(u)$ et $\operatorname{Ker}(P_1(u)) + \operatorname{Ker}(P_2(u)) \subset \operatorname{Ker}(P_1 P_2)(u)$

. Soit maintenant $x \in \operatorname{Ker}(P_1 P_2)(u)$:
on a alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = (A_1 P_1)(u)(x)$
et $x_2 = (A_2 P_2)(u)(x)$
par l'égalité (1)

et donc : $P_1(u)(x_1) = (P_1 A_2 P_2)(u)(x)$
$= ((A_2)(u) \circ (P_1 P_2)(u))(x)$
$= 0$ et $x_1 \in \operatorname{Ker}(P_1(u))$

de même on a $x_2 \in \operatorname{Ker}(P_2(u))$

donc $x \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$

et $\ker(P_1P_2)(u) \subset \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$

d'où $\ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)) = \ker(P_1P_2)(u)$

- Montrons que $\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}$

Soit $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u))$

on a alors par la relation (1) :

$$x = (A_2(u) \circ P_2(u))(x) + (A_1(u) \circ P_1(u))(x)$$

$$= 0$$

Donc $\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}$

- Donc si $n=2$ on a bien $\ker(P_1P_2)(u) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$

* Supposons le lemme vrai pour $n \geq 2$.

Posons $P_2' = P_2 \dots P_{n+1}$, alors P_1 et P_2' sont premiers entre eux.

Donc par le cas $n=2$ on a : $\ker\left(\prod_{k=1}^{n+1} P_k(u)\right) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2'(u))$

et par l'hypothèse de récurrence on a alors,

$$\ker(P_2'(u)) = \bigoplus_{k=2}^{n+1} \left(\ker(P_k(u))\right)$$

d'où $\ker\left(\prod_{k=1}^{n+1} P_k(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{n+1} \left(\ker(P_k)(u)\right)$

(21) THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON (66 leçon)

Théorème : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors le polynôme caractéristique de f est annulateur de f, $\chi_f(f) = 0$

Démonstration :

Soient $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$, $x \in E$ et F_x le plus petit s.e.v. stable par f contenant x : $F_x = \mathrm{Vect}\left(\{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}\right)$

Soit $\overline{f}$ l'endomorphisme induit par f sur F_x.

Montrons que $\chi_{\overline{f}}(\overline{f})(x) = 0$:

Si $p = \dim_{\mathbb{K}}(F_x)$, alors $\mathcal{B} = \{f^k(x)\}_{k\in[\![0;p-1]\!]}$ est une base de F_x.

Donc : $\exists (a_0;\dots;a_{p-1}) \in \mathbb{K}$ tq $f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x)$

La matrice $\overline{A}$ de $\overline{f}$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

d'où : $\chi_{\overline{f}}(X) = \det\left(\overline{A} - XI_p\right) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & -X & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & & 1 & a_{p-1}-X \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k - X^p \\ 1 & -X & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -X & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & & 1 & a_{p-1}-X \end{vmatrix} \quad L_0 \leftarrow \sum_{k=0}^{p-1} X^k L_k$$

$$= (-1)^{p+1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k - X^p\right) \quad \text{(développement 1° ligne)}$$

d'où $\chi_{\bar{f}}(f)(x) = (-1)^{p+1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k - f^p\right)(x) = 0$

- Montrons que $\chi_{\bar{f}} \mid \chi_f$.

Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la base $\mathcal{B}$ de F_x en une base $(x; f(x), \dots, f^{p-1}(x); e_{p+1}, \dots e_n)$ de E.

Dans cette base, la matrice A de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } A_{22} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$$

A est triangulaire par blocs, donc :

$$\det(A - XI_n) = \det(\bar{A} - XI_p)\det(A_{22} - XI_{n-p})$$

i.e. $\chi_f(X) = \chi_{\bar{f}}(X) \cdot \chi_{A_{22}}(X)$

donc $\chi_{\bar{f}} \mid \chi_f$

Comme $\chi_{\bar{f}}(f)(x) = 0$, alors $\chi_f(f)(x) = 0$

Cela est vrai pour tout x de E, donc :

$$\underline{\chi_f(f) = 0}$$

(22) CRITÈRE D'ABEL UNIFORME (Dantzel)

Soit $(F;\|.\|)$ un e.v.n. complet.

Théorème : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet $(F;\|.\|)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles, toutes deux définies sur un intervalle I vérifiant :

1/ $\exists M>0$ tq $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \left\|\sum_{p=0}^{n} f_p(x)\right\| \leq M$

2/ la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers 0 en décroissant.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} g_n f_n$ converge uniformément sur I

Preuve (Dantzel) :

On note pour tout $n\in\mathbb{N}$ les applications
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} g_k f_k$$

Montrons que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I :

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} g_k f_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} g_k (S_k - S_{k-1}) + g_0 f_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} g_k S_k - \sum_{k=1}^{n} g_k S_{k-1} + g_0 f_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} g_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} S_k + g_0 f_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (g_k - g_{k+1}) S_k + g_0 f_0 + g_n S_n - g_1 S_0
\end{aligned}$$

Maintenant, nous avons : $\forall x\in I, \|g_n(x) S_n(x)\| \leq M.\|g_n(x)\|$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément convergente sur I vers la fonction nulle, la suite $(S_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi

Considérons la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ A_n = \sum_{k=1}^{n-1} (g_k - g_{k+1}) S_k$$

- Montrons qu'elle est uniformément convergente sur I en démontrant qu'elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I :

Soit $M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\|S_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} g_k\right\| \leq M$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers 0 en décroissant, donc soit $\varepsilon>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n\geq n_0,\ \forall x\in I,\ 0\leq g_n(x)\leq \varepsilon$$

alors on a :

$\forall n\geq n_0,\ \forall p>n,\ \forall x\in I$:

$$\|A_p(x) - A_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n}^{p-1} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) S_k(x) \right\|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{p-1} M \underbrace{|g_k(x) - g_{k+1}(x)|}_{\geq 0}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{p-1} M (g_k(x) - g_{k+1}(x)|$$

$$\leq M (g_n(x) - g_p(x)|$$

$$\leq M\varepsilon$$

donc la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc elle est uniformément convergente. car $(\mathbb{E}; \|\cdot\|)$ est complet.

Ainsi la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur I

La série $\sum_{n\geq 0} g_n f_n$ est donc uniformément convergente sur I

---

(23) RAYON DE CONVERGENCE (Dantzel)

- Proposition 1 :

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de variable réelle ou complexe de rayon de convergence R, et soit $z \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors :

1) Si $|z| < R$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente

2) Si $|z| > R$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente

- Proposition 2 :

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de variable réelle ou complexe de rayon de convergence R. Alors on a :

1) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $R \geq 1$

2) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R < 1$

- Démonstration de la proposition 1 : (Dantzel)

1) Soit $z \in \mathbb{K} (= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ tel que $|z| < R$

Donc il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que $|z| < r \leq R$

Par la définition du rayon de convergence R, on peut prendre M un majorant de la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z^n| = |a_n r^n \tfrac{z^n}{r^n}| = |a_n r^n| \cdot \left|\tfrac{z}{r}\right|^n \leq M \cdot \underbrace{\left|\tfrac{z}{r}\right|^n}_{\text{terme d'une série convergente car } |\frac{z}{r}|<1}$$

2) Soit $x \in \mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ tel que $|x| > R$
alors $|x| \notin \{r \geq 0 / (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite bornée$\}$
donc la suite $(a_n |x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0
donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est divergente
(car si $\sum a_n$ est convergente alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$: on le montre par exemple avec le critère de Cauchy:

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|u_n + \dots + u_{n+p}\| < \varepsilon$$

)

— Démonstration de la proposition 2:

1) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors:
$1 \in \{r \geq 0 / (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite bornée$\}$
donc $1 \leq R$ (car $R = \sup\{r \geq 0 / (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite bornée$\}$)

2) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0
alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 1^n$ est divergente
donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 1^n$ n'est pas absolument convergente
donc par la proposition 1 (on a pas $1 < R$)
on a: $R \leq 1$

— Exemple: Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que a_n est la $n^{ième}$ décimale de π.
Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ admet 1 comme rayon de convergence.

— Solution: • $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [\![0;9]\!]$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.
donc $R \geq 1$

• π n'est pas un nombre décimal, donc pour tout n_0 de $\mathbb{N}$, il existe un entier n tel que $n \geq n_0$ et $a_n \geq 1$.
donc la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0.
donc $R \leq 1$

• Donc $\underline{R = 1}$

(24) RADICAL D'UN IDÉAL

(Goardon)

- Exercice:
Soit A un anneau unitaire commutatif et I un idéal de A.
On appelle radical de I l'ensemble noté $\sqrt{I} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x^n \in I\}$
a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A
b) Déterminer le radical d'un idéal de $\mathbb{Z}$

- Solution: a) * Montrons que $(\sqrt{I}; +)$ est un sous-groupe de $(A; +)$:

- on a $0 \in \sqrt{I}$ car $I \subset \sqrt{I}$
- soit $x \in \sqrt{I}$
  Comme $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $x^n \in I$ on a: $(-1)^n x^n = (-x)^n \in I$
  donc $-x \in \sqrt{I}$
- Soit $(x; y) \in (\sqrt{I})^2$, alors $\exists (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tq $x^m \in I$ et $y^n \in I$
  A est commutatif, donc:

$$(x+y)^{m+n-1} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^k y^{m+n-1-k}$$

$$= \underbrace{y^n \left(\sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^k y^{m-1-k} \right)}_{\in I} + \underbrace{x^m \left(\sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^{k-m} y^{m+n-1-k} \right)}_{\in I}$$

donc $(x+y)^{m+n-1} \in I$ (car I idéal)
donc $x+y \in \sqrt{I}$

Donc $(\sqrt{I}; +)$ est bien un sous-groupe de $(A; +)$

* Soient $x \in \sqrt{I}$ et $a \in A$,
alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $x^n \in I$
et $(ax)^n = \underbrace{a^n x^n}_{\in I}$ (car A commutatif)
donc $ax \in \sqrt{I}$

Donc $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

b/ Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$.

Comme $\mathbb{Z}$ est principal, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $I = n\mathbb{Z}$

- Si $n = 0$, on a : $\sqrt{I} = \{0\}$
- Si $n = 1$, on a : $\sqrt{I} = \mathbb{Z}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

on a : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ où p_i premier $\forall i \in [\![1; k]\!]$ et $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ (décomposition en facteurs premiers)

Montrons que $\sqrt{I} = p_1 \dots p_k \mathbb{Z}$:

- Si $x \in \sqrt{I}$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tq $x^m \in n\mathbb{Z}$

donc : $n \mid x^m$

et donc : $\forall i \in [\![1; k]\!]$, $p_i \mid x^m$

donc $\forall i \in [\![1; k]\!]$, $p_i \mid x$

Comme les p_i sont premiers et distincts, on a $p_1 \dots p_k \mid x$

donc $\sqrt{I} \subset p_1 \dots p_k \mathbb{Z}$

- Soit maintenant $x \in p_1 \dots p_k \mathbb{Z}$.

alors il existe $r \in \mathbb{Z}$ tq $x = p_1 \dots p_k r$

Soit $m = \max_{1 \leq i \leq k} (\alpha_i)$, alors on a :

$$x^m = p_1^m \dots p_k^m r^m$$

et $\underbrace{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}}_{n} \mid \underbrace{p_1^m \dots p_k^m r^m}_{x^m}$

donc $x^m \in n\mathbb{Z}$ i.e. $x^m \in I$

d'où $x \in \sqrt{I}$

Donc : $\sqrt{I} = p_1 \dots p_k \mathbb{Z}$

(25) THÉORÈMES DES POINTS FIXES (Dantzig)

Théorème : $(E;d)$ espace métrique complet et une $f : E \to E$ une application contractante (i.e. $\exists k \in [0;1[$ tq $\forall (x,y) \in E^2, d(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y)$)
Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme : $\begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
est convergente vers ce point fixe

Preuve :

- **Montrons l'existence du point fixe :**
Soit $u_0 \in E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$
Par récurrence évidente on a : $d(u_{n+1},u_n) \leq k^n d(u_1,u_0)$
et pour tout entier p tel que $0<q<p$ on a :

$$d(u_q,u_p) \leq \sum_{n=q}^{p-1} d(u_{n+1},u_n) \leq \sum_{n=q}^{p-1} k^n d(u_1,u_0)$$
$$\leq d(u_1,u_0)\, k^q \frac{1-k^{p-q}}{1-k}$$
$$\leq d(u_1,u_0) k^q \frac{1}{1-k} \quad (\text{car } k \in [0;1[)$$
$$\xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq N,\ 0 \leq d(u_1,u_0) k^n \frac{1}{1-k} < \varepsilon$
Donc $\forall p \geq N, \forall q \geq N,\ d(u_p,u_q) < \varepsilon$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E complet, donc elle converge vers $\ell \in E$.
On a alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et comme f continue (car lipschitzienne) on a aussi : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$
donc $f(\ell) = \ell$ et ℓ est un point fixe.

- **Montrons l'unicité du point fixe :**
Soient x et y deux points fixes de f. On a : $d(x,y) \leq k\, d(x,y)$
i.e. $(1-k)d(x,y) \leq 0$
Mais $(1-k) \geqslant 0$ car $k \in [0;1[$
donc $d(x,y) \leq 0$ i.e. $d(x,y) = 0$ et $x = y$
Le point fixe est unique

- Soit $u_0 \in E$ et ℓ pt fixe de f :
on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(u_{n+1}; \ell) = d(f(u_n); f(\ell))$
$\leq k\, d(u_n; \ell)$
$\leq k^n d(u_0; \ell) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers ℓ.

- Théorème : Soit $(E; d)$ un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application telle que : $\forall (x; y) \in E^2$, $x \neq y \Rightarrow d(f(x); f(y)) < d(x; y)$
Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme $\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est convergente vers ce point fixe.

- Preuve : - Montrons l'existence et l'unicité du point fixe :

• Soit $g : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x; f(x))$
f est lipschitzienne donc continue, donc g est également continue sur E compact.
Donc g est bornée et atteint ses bornes.
Soit donc $\ell \in E$ tq : $\min_{x \in E} d(x; f(x)) = d(\ell; f(\ell)) = d$
Supposons que $\ell \neq f(\ell)$. Alors dans ce cas :
$d(f(\ell); f(f(\ell))) < \underbrace{d(\ell; f(\ell))}_{d}$: absurde !
Donc on a $\ell = f(\ell)$ et ℓ est un point fixe de f.

• Soit ℓ et ℓ' deux points fixes de f. On a alors :
$d(f(\ell); f(\ell')) = d(\ell; \ell')$
d'où : $\ell = \ell'$ et ℓ point fixe de f est unique : ℓ

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = d(u_n; \ell) \ \forall n \in \mathbb{N}$
• Si $u_n \neq \ell$ on a : $d(u_{n+1}; \ell) = d(f(u_n); f(\ell)) < d(u_n; \ell)$
• Si $u_n = \ell$ on a : $d(u_{n+1}; \ell) = d(u_n; \ell) = 0$

Dév 25.2

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0,
elle converge donc vers un réel noté α.
Comme E est compact, on peut considérer la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$
convergente vers $\ell_1 \in E$
On a alors :

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} d(u_{\varphi(n)}; \ell) = d(\ell_1; \ell)$$

et $$\alpha = \lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)+1} = \lim_{n\to+\infty} d(u_{\varphi(n)+1}; \ell)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} d(f(u_{\varphi(n)}); \ell)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} d(f(\ell_1); \ell)$$

on obtient donc $\alpha = d(\ell_1; \ell) = d(f(\ell_1); f(\ell)) = 0$ (hypothèse)
donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0
et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente vers ℓ, unique point fixe de f.

(26) CRITÈRE DE CAUCHY POUR INTÉGRALES IMPROPRES & RÈGLE D'ABEL (Demi-cal)

- Proposition : Soit $f : [a;b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a;b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si :

$(\star)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a;b[$ tq $\forall (x;y) \in ([c;b[)^2, \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$

- Preuve : on le démontre pour b réel (pour $b = +\infty$, même principe)

Soit : $F : [a;b[\to \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

- **Si $(\star)$ est vérifiée :**

on va montrer que F admet une limite quand x tend vers b.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[a;b[$ convergeant vers b.

Soit $\varepsilon > 0$ et $c \in [a;b[$ vérifiant :

$\forall (x;y) \in ([c;b[)^2, \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$

Comme $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, a_n \in [c;b[$

Alors : $\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |F(a_n) - F(a_p)| = \left| \int_{a_p}^{a_n} f(t)dt \right| < \varepsilon$

donc la suite $(F(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente car $\mathbb{K}$ complet

donc F admet une limite en b

- **Si $\int_a^b f(t)dt$ converge :**

alors F admet une limite en b

Soit $\varepsilon > 0$ et $c \in [a;b[$ vérifiant : $\forall x \in [c;b[, \left| F(x) - \lim_{t \to b} F(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

alors $\forall (x;y) \in ([c;b])^2, \left| \int_x^y f(t)dt \right| = |F(y) - F(x)| < \varepsilon$

$|F(y) - \lim F - F(x) + \lim F|$

- Proposition : f, g continues (par morceaux) sur l'intervalle $[a;b[$
Si 1) f est à valeurs réelles, positive, décroissante t.q. $\lim_{x\to b} f(x) = 0$
2) g est à valeurs réelles ou complexes et :
$\exists M > 0$ t.q. $\forall x \in [a;b[, \left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq M$
Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

- Preuve : • Si g est à valeurs réelles :
Soit $\varepsilon > 0$ et $c \in [a;b[$ vérifiant $\forall x \in [c;b[, 0 \leq f(x) \leq \varepsilon$
Soient $(x;y) \in ([c;b[)^2$ t.q. $x < y$.
Grâce à la seconde formule de la moyenne (à vérifier !),
il existe alors un réel $z \in [x;y]$ t.q.,
$$\int_x^y f(t)g(t)dt = f(x+) \int_x^z g(t)dt$$
d'où $\int_x^y f(t)g(t)dt \leq 2M\varepsilon$
donc l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle est convergente

• Si g est à valeurs complexes : $g = Re(g) + i\,Im(g)$
et $Re(g)$ et $Im(g)$ vérifient les hypothèses
donc $\int_a^b Re(g(t))f(t)dt$ et $\int_a^b Im(g(t))f(t)dt$ convergent
donc $\int_a^b f(t)g(t)dt$ aussi.